MACIERZE LOSOWE
LISTA 2

Momenty mieszane macierzowych zmiennych losowych

1. Niech $X = (X_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$ będzie symetryczną rzeczywistą macierzą losową, tzn. X jest macierzą $n \times n$, której elementy są zmiennymi losowymi. Zakładamy, że $\{X_{i,j} : 1 \le i \le j \le n\}$ są niezależne oraz że rozkład każdej zmiennej $X_{i,j}$ jest taki sam dla każdego $i < j$ oraz rozkład każdej zmiennej $X_{j,j}$ jest taki sam dla każdego j. oraz że zmienne te posiadaja wszystkie momenty skończone, czyli

$$a_m = \mathbb{E}(X_{i,j}^m) = \mathbb{E}(X_{1,2}^m) \in \mathbb{R} \quad \text{oraz} \quad b_m = \mathbb{E}(X_{j,j}^m) = \mathbb{E}(X_{1,1}^m) \in \mathbb{R}$$

   dla wszystkich i, j, m. Obliczyć wartość oczekiwaną postaci

$$\mathbb{E}(X_{i,j}X_{j,k}X_{k,l}X_{l,i})$$

   dla różnych przypadków indeksów i, j, k, l jako jednomian zmiennych a_1, a_2, a_3, a_4, oraz b_1, b_2, b_3, b_4.

2. Wykorzystując poprzednie zadanie i zakładając, że zmienne losowe mają średnią zero, czyli $a_1 = b_1 = 0$, co często się zakłada, wyznaczyć czwarty moment macierzy X względem wartości oczekiwanej śladu, czyli $m_4 = \mathbb{E}(\mathrm{Tr}(X^4))$.

3. W każdym z przypadków ciągu indeksów (i, j, k, l), tzn. równych bądź różnych, skonstruować parę (G, w), gdzie G jest grafem spójnym o zbiorze wierzchołków $V(G) = \{i, j, k, l\}$ i zbiorze krawędzi $E(G) = \{\{i, j\}, \{j, k\}, \{k, l\}, \{l, i\}\}$, z wyróżnionym wierzchołkiem i, natomiast w jest spacerem na tym grafie postaci

$$w = ((i, j), (j, k), (k, l), (l, i))$$

   (pamiętać należy, że $\{s, s\}$ oznacza *pętlę*, czyli krawędź o początku i końcu w s).

4. Przy takich samych założeniach jak w zadaniu poprzednim, skonstruować dla każdej z podanych niżej wartości oczekiwanych pary (G, w), gdzie G jest grafem spójnym zdefiniownym przez ciąg indeksów, natomiast w jest spacerem na tym grafie:

$$\mathbb{E}(X_{i,j}X_{j,k}X_{k,i}X_{i,l}X_{l,i}X_{i,i})$$
$$\mathbb{E}(X_{i,j}X_{j,k}X_{k,k}X_{k,j}X_{j,k}X_{k,i})$$

   gdzie indeksy i, j, k, l są różne. Obliczyć te wartości oczekiwane, podobnie jak w zadaniu 1. Rozważyć dowolny produkt 8 zmiennych, który pojawi się przy obliczaniu wartości oczekiwanej z $\mathrm{Tr}(X^8)$ i przyporządkować mu parę (G, w).

5. Zakładając w poprzednim zadaniu, że zamiast zmiennych $\{X_{i,j} : 1 \le i \le j \le n\}$ bierzemy zmienne znormalizowane $\{X_{i,j}/\sqrt{n} : 1 \le i \le j \le n\}$ i znormalizowany ślad $\mathrm{Tr}_n(X) = \mathrm{Tr}(X)/n$, tak jak zazwyczaj robimy, badając asymptotykę macierzy losowych, wyznaczyć granicę momentów m_4 oraz m_6 gdy $n \to \infty$ przy założeniu, że $a_1 = b_1 = 0$.

Romuald Lenczewski